Quo vadis Analysisunterricht?
Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven für das Jahr 2000

Werner Blum, Kassel

In der vorliegenden Arbeit werden einige wesentliche aktuelle Entwicklungen zum Analysisunterricht diskutiert und jeweils entsprechende Perspektiven, d.h. Wunschvorstellungen für die nächsten Jahre formuliert [1]. Der Obertitel der Arbeit ist entlehnt von einer Podiumsdiskussion in Bielefeld; siehe Danckwerts/Vogel (1992).

1. Rück- und Überblick

In der *didaktischen Diskussion* zum Analysisunterricht und mit gewissen Abstrichen und Zeitverschiebungen auch in Lehrplänen und Schulbüchern lassen sich in den vergangenen 30 Jahren grob folgende Phasen unterscheiden (vgl. Blum/Törner 1983 und Tietze 1992):

1) Die *60er Jahre* waren noch geprägt von der *"klassischen"*, stark aufgabenorientierten Schulanalysis.
2) Die *70er Jahre* wurden beeinflußt von der sog. *"Strengewelle"* mit ihrer Orientierung an der Universitäts-Analysis.
3) Die *80er Jahre* brachten verschiedene *methodische* Neuorientierungen, insbesondere
   - Betonung von Vereinfachungen, Rückbesinnung auf anschauliches und genetisches Vorgehen
   - Anwendungsorientierung,
   - Computereinsatz.
4) In den *90er Jahren* gab und gibt es auch *grundsätzliche* Diskussionen über den Bildungswert der Schulanalysis angesichts zweier großer aktueller *Herausforderungen*:
   - neue Technologien,
   - (quantitativ und qualitativ) veränderte Schülerpopulationen.

In 3) sind bereits drei der wichtigsten *aktuellen Entwicklungen* explizit genannt: Präformale Mathematik, Anwendungen, Computer. Der vierte wesentliche Aspekt ist in 4) implizit angesprochen: Was sind heutzutage sinnvolle Kriterien der Leistungsmessung und -beurteilung? Auf diese vier Aspekte werde ich in den Abschnitten *3* bis *6* eingehen. In *7* werde ich dann noch einige weitere, weniger zentrale Entwicklungen streifen.

[1] Viele Passagen der Arbeit, insbesondere die Perspektiven, sind aus Blum (1995a) übernommen.

Dies sind, wie gesagt, Tendenzen in der didaktischen Diskussion. Die *tatsächliche* Situation in der *Unterrichtspraxis* wurde hiervon partiell beeinflußt. Das dominierende Merkmal des schulischen Analysisunterrichts scheint aber über die Jahrzehnte hinweg recht stabil geblieben zu sein: seine *Kalkülorientierung*. So hat z.B. E. Gräupl (1990) als Fazit einer großen Fülle von Unterrichtsbesuchen, die er als Schulaufsichtsbeamter im Lande Salzburg durchgeführt hat, eine typische Mathematikstunde an der AHS so beschrieben: "*Der Lehrer [...] beginnt die Stunde mit der Kontrolle der Hausübungen. Anschließend wird wiederholt bzw. geprüft. Der Hauptteil der Stunde besteht darin, daß "geübt" wird. Dies geschieht im Stil der Aufgabendidaktik. Eine Aufgabe, dem Lehrbuch entnommen, wird entweder vom Lehrer oder Schüler an der Tafel gerechnet oder in Einzelarbeit von den Schülern gelöst. [...] Am Ende der Stunde wird wieder eine Hausübung [...] aufgegeben.*" G. Schmidt hat bei der eingangs genannten Podiumsdiskussion schärfer formuliert: "*Unter dem Einfluß kurzschrittiger und scheinobjektiver Leistungsüberprüfungen dominieren die Anwendung von Kalkülen und von schematischen Verfahren gegenüber dem angestrebten Verständnis von Ideen und Zusammenhängen.*"

Ich werde insofern in *3* bis *7* stets auch meine Einschätzung der tatsächlichen Situation und der Entwicklungen in der Schulpraxis nennen und auf mögliche Diskrepanzen zu meinen Perspektiven hinweisen.

Zuerst skizziere ich in *2* ein exemplarisches Unterrichtsbeispiel. Dies ist eingebettet in die Analysis-Konzeption, die A. Kirsch und ich seit über 20 Jahren entwickelt und (auch selbst) vielfach erprobt haben, in allgemein- und in berufsbildenden höheren Schulen; man vergleiche insbesondere Blum/Kirsch (1979).

2. Ein Beispiel: Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Die wichtigsten allgemeinen *Lernziele* für den Analysisunterricht sind:

- Die Schüler sollen adäquate und tragfähige *Grundvorstellungen* von den wesentlichen Begriffen und Methoden der Analysis aktiv und kohärent aufbauen (Begriffe: Funktion, Grenzwert, Ableitung, Integral; Methoden: Funktionen darstellen, analysieren, konstruieren, interpretieren).
- Die Schüler sollen die wesentlichen Inhalte der Analysis bei inner- und außermathematischen Aufgaben begründet und *verständig handhaben* können.

Die wichtigsten Grundvorstellungen sind:

1) Ableitung als *lokale Änderungsrate* (ÄR), z.B.
   - Momentangeschwindigkeit als momentane ÄR des zurückgelegten Wegs bzgl. der Zeit,

- Grenzsteuersatz als lokale ÄR der Einkommensteuer bzgl. des Einkommens.

Die zugehörige geometrische Grundvorstellung ist die Ableitung als Graphensteigung.

Ein zentrales Lernziel lautet (vgl. Blum 1975):

Lernziel 1: Der Schüler soll zu gegebener Bedeutung von x und $f(x)$ als Größen die Bedeutung

von $\frac{df(x)}{dx}$ als lokale ÄR angeben können.

2) (Bestimmtes) Integral als "*verallgemeinertes Produkt*" (VP), z.B.

- Arbeit als VP aus Kraft und Weg,
- Einkommensteuer als VP aus (lokalem) Steuersatz und Einkommen.

Die zugehörige geometrische Grundvorstellung ist das Integral als Flächeninhalt.

Ein zentrales Lernziel lautet (vgl. Blum 1975):

Lernziel 2: Der Schüler soll zu gegebener Bedeutung von x und $f(x)$ als Größen die Bedeutung

von $\int_a^x f(t)dt$ als VP angeben können.

Nun nehmen wir die beiden Lernziele wirklich ernst und wenden sie auf die aus den genannten Grundvorstellungen resultierenden Funktionen an. Vorausgesetzt ist dabei, daß diese Grundvorstellungen im Unterricht bereits erarbeitet worden sind.

Zu Lernziel 1: Gegeben sei eine ("genügend vernünftige") Funktion f. Es sei F_a die VP-Funktion zu f und geg. Stelle a (formal: $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$). Als *paradigmatisches realitätsbezogenes Beispiel* wählen wir

x - Weg

$f(x)$ - Kraft

$F_a(x)$ - Zwischen a und x verrichtete Arbeit

Was bedeutet die ÄR $\frac{dF_a(x)}{dx}$ der Arbeit bzgl. des Wegs an einer Wegstelle x?

Aus der Begriffsbildung "Arbeit als VP" ist wohlbekannt (und nur dies wird im weiteren gebraucht): Für kleine Wegstückehen gilt

Δ Arbeit $\approx$ Kraft $\cdot\Delta$ Weg; formal: $\Delta F_a(x) \approx f(x)\cdot\Delta x$ auf $[x; x+\Delta x]$.

Nun führen wir die Begriffsbildung "ÄR" konkret durch: Die *mittlere* ÄR der Arbeit bzgl. des Wegs ist

$\frac{\Delta\text{Arbeit}}{\Delta\text{Weg}}$, dies ist (s.o.!) $\approx$ Kraft; formal: $\frac{\Delta F_a(x)}{\Delta x} \approx f(x)$ auf $[x; x+\Delta x]$.

Nun ist inhaltlich völlig klar: Die lokale ÄR der Arbeit bzgl. des Wegs (die aus den mittleren ÄRn vermöge $\Delta x \to 0$ entsteht) ist *gleich* der Kraft! Formal: $\frac{dF_a(x)}{dx} = f(x)$.

Dies bedeutet offenbar nichts anderes als den *ersten Hauptsatz* der Differential- und Integralrechnung:

Hauptsatz 1: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Differenzieren macht Integrieren rückgängig.

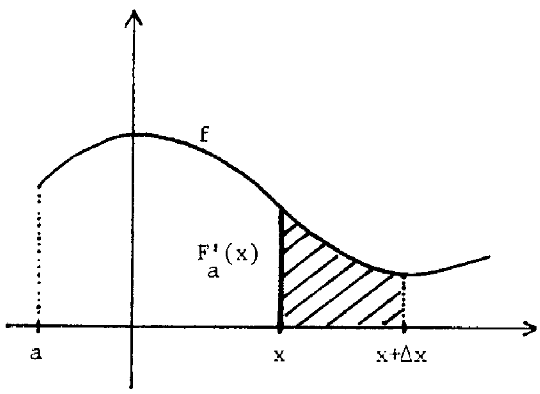
Existenzfragen und sinnvolle Voraussetzungen an f werden in einer nachgängigen Beweisanalyse geklärt.

Statt eines realitätsbezogenen Beispiels wie eben kann man auch die *geometrische* Deutung des Integrals verwenden:

x - Abszisse

$f(x)$ - Ordinate

$F_a(x)$ - Flächeninhalt zwischen Graph *(f)* und erster Achse in $[a;x]$



Der Argumentationsstrang verläuft *identisch*, wobei jetzt *kein* vorgängiger Integralbegriff benötigt wird. Ergebnis: Die lokale ÄR des Flächeninhalts bzgl. der Abszisse (an einer bestimmten Stelle) ist gleich der Ordinate (an dieser Stelle).

Diese geometrische Argumentation kann, ja sollte sogar - natürlich ohne Integralschreibweise - schon im Rahmen der *Differentialrechnung* behandelt werden (etwa im Kontext geometrischer Interpretationen des Ableitungsbegriffs wie Kreisumfang gleich ÄR des Kreisinhalts bzgl. des Radius) und nicht erst - wie durchweg schulüblich - in einem eigenen Unterrichtsabschnitt mit der Überschrift "Beweis des Hauptsatzes" im fortgeschrittenen Stadium der Integralrechnung.

Der erste Hauptsatz ergibt sich also in ganz natürlicher Weise durch geeignete Verbindung der Grundvorstellungen vom Ableitungs- und Integralbegriff. Er ist insofern nichts anderes als das Ergebnis eines Beispiels (natürlich eines besonderen) zum Ableitungsbegriff entsprechend Lernziel 1. Dies hat bereits A. Kirsch (1976) ausgeführt, leider ohne Resonanz in Unterrichtspraxis oder Schulbüchern.

Zu Lernziel 2: Gegeben sei eine ("genügend vernünftige") Funktion F. Es sei f die ÄR-Funktion zu F (formal: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$). Als *paradigmatisches realitätsbezogenes Beispiel* wählen wir

x - Zeit
$F(x)$ - Weg
$f(x)$ - Momentangeschwindigkeit

Was bedeutet das VP $\int_a^x f(t)dt$ aus Geschwindigkeit und Zeit in einem Zeitintervall $[a;x]$?

Aus der Begriffsbildung "Geschwindigkeit als ÄR" ist wohlbekannt: *Lokal*, d.h. für kleine Zeitstückchen gilt

$$\frac{\Delta \text{Weg}}{\Delta \text{Zeit}} \approx \text{(Momentan-)Geschwindigkeit},$$

oder (lineare Approximationsidee!)

ΔWeg $\approx$ Geschwindigkeit $\cdot$ ΔZeit; formal: $\Delta F(u) \approx f(u) \cdot \Delta u$ auf $[u; u + \Delta u]$.

Das erwarten wir auch *global*. Dazu führen wir die Begriffsbildung "VP" konkret durch: Wir unterteilen erstens (in Gedanken) das Intervall $[a; x]$:

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = x.$$

Wir bilden zweitens die einzelnen Produkte Geschwindigkeit $\cdot$ ΔZeit,

dies ist (s.o.!) $\approx$ ΔWeg dort; formal: $f(u_i) \cdot \Delta u_i \approx \Delta F(u_i)$ in $[u_i; u_{i+1}]$.

Drittens summieren wir alle Produkte auf; offenbar ergibt die Summe aller einzelnen Wegzuwächse den gesamten Wegzuwachs (formal: "Teleskop-Summe"!); formal:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(u_i) \cdot \Delta u_i \approx \Delta F(x).$$

Nun ist inhaltlich völlig klar: Das VP aus Geschwindigkeit und Zeit (das aus dieser Produktsumme vermöge $n \to \infty$, $\Delta u_i \to 0$ entsteht) ist *gleich* dem Wegzuwachs! Formal:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Dies bedeutet offenbar nichts anderes als den *zweiten Hauptsatz* der Differential- und Integralrechnung:

Hauptsatz 2: $\int_a^x \frac{dF(t)}{dt} dt = F(x) - F(a)$

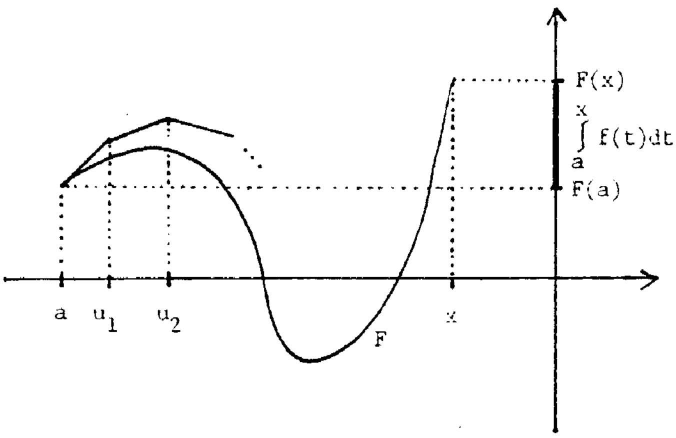
Integrieren macht Differenzieren (bis auf eine additive Konstante) rückgängig.

Statt eines realitätsbezogenen Beispiels wie eben kann man auch die *geometrische* Deutung der Ableitung verwenden (was nun wohl weniger vertraut ist als vorhin):

x - Abszisse

$F(x)$ - Ordinate

$f(x)$ - Graphensteigung



Der Argumentationsstrang verläuft *identisch*. Hierbei wird also der Graph von F, ausgehend von $F(a)$, näherungsweise aus seinen lokalen Steigungen "*rekonstruiert*". Ergebnis: Das VP aus Graphensteigung und Abszisse (in einem bestimmten Intervall) ist gleich der Ordinatendifferenz (bzgl. dieses Intervalls).

Auch der zweite Hauptsatz ergibt sich also in ganz natürlicher Weise durch geeignete Verbindung (umgekehrt wie vorhin) der Grundvorstellungen vom Ableitungs- und Integralbegriff. Er ist insofern nichts anderes als das Ergebnis eines (besonderen) Beispiels zum Integralbegriff entsprechend Lernziel 2. Er ist offenbar ein eigenständiger Satz und sollte in der Schule unabhängig vom ersten Hauptsatz hergeleitet werden, nicht wie allgemein üblich bloß als dessen Korollar, auch da der zweite Hauptsatz für die Schule ja deutlich wichtiger ist als der erste.

In den folgenden Abschnitten werde ich mehrfach auf das Beispiel Hauptsätze zurückkommen.

3. Realitätsbezüge im Analysisunterricht

Die Mathematikdidaktik hat bekanntlich seit Ende der 70er Jahre die Anwendungen wiederentdeckt (vgl. den Überblicksartikel Blum 1995b). Neuere österreichische und deutsche Schulbücher enthalten erfreulicherweise deutlich mehr Anwendungsbeispiele als früher.

Es gibt ja eine Fülle von *Gründen*, Anwendungen integral in den Analysisunterricht einzubeziehen; u.a.

- hilft die Behandlung von Beispielen wie Geschwindigkeit oder Einkommensteuer Schülern beim Verstehen bzw. Bewältigen von Situationen aus Alltag und Umwelt;
- kann man auch mit Hilfe von Realitätsbezügen allgemeine Fähigkeiten und Haltungen fördern, so z.B. die Fähigkeit zum Argumentieren im Zusammenhang mit den realitätsbezogenen Hauptsatz-Beweisen aus Abschnitt *2*;
- gehören Anwendungen zu einem ausgewogenen Bild von Mathematik in Geschichte und Gegenwart;

- können Anwendungsbeispiele das Verstehen und Behalten mathematischer Inhalte erleichtern oder gar - man denke an die Grundvorstellungen von Ableitung und Integral - ein adäquates Begreifen erst ermöglichen.

Allgemeiner liefern Realitätsbezüge *eine* Antwort auf die *Sinn*frage für den Unterricht, die in der didaktischen Diskussion seit einigen Jahren wieder verstärkt gestellt wird (vgl. schon Fischer 1982) und die gerade in Österreich explizit im Lehrplan verankert ist.

Anwendungsbeispiele, an denen man besonders schön das *Modellieren*, das *Übersetzen* zwischen Realität und Mathematik schulen kann, sind Extremwertprobleme wie der optimale Verkehrsdurchsatz oder die Milchtüte. Mit Rechnerhilfe können solche Beispiele bereits in der 10. Schulstufe behandelt werden, wobei man sich jeweils nur davon überzeugen sollte, daß es überhaupt ein eindeutig bestimmtes Extremum gibt. Weitere Anwendungsbeispiele für den Analysisunterricht wie z.B. Kugelstoßen, Regenbogen, Kassettenrekorder-Anzeige, Straßen-Trassierung oder auch wohlbekannte physikalische oder ökonomische Beispiele findet man in der Bibliographie von Kaiser u.a. (1982/1992).

Obwohl man sich heutzutage einig zu sein scheint, daß Anwendungsbezüge in den Unterricht gehören, kommen sie im Unterrichtsalltag weiterhin eher selten vor. Weshalb? Es gibt diverse *Hindernisse* für Anwendungen, u.a.
- der Zeit- und Stoffdruck, unter dem Lehrer meist stehen (allerdings erscheinen andere Inhalte weniger bildungsrelevant; mehr dazu in Abschnitt *5*);
- die Orientierung an Standard-Prüfungsaufgaben (mehr dazu in Abschnitt *6*);
- die wachsenden Ansprüche an Lehrer und Schüler (dies ist unvermeidbar, wird aber dadurch abgemildert, daß es bereits eine Fülle erprobter und gut aufbereiteter Unterrichtsmaterialien gibt, z.B. von der MUED; man vergleiche exemplarisch Böer 1993).

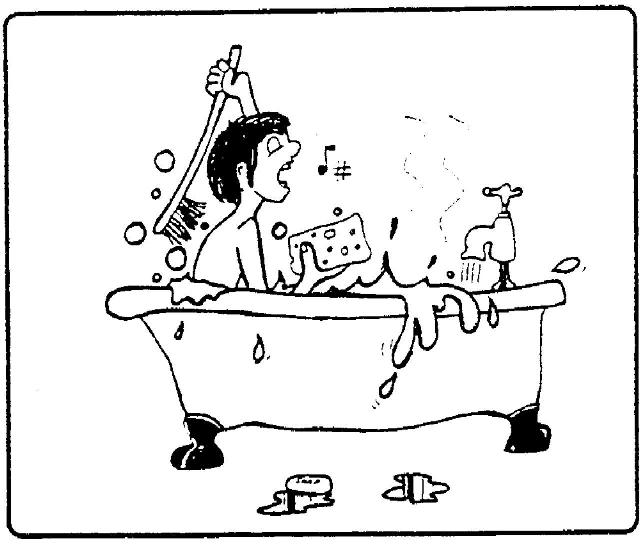
Damit formuliere ich meine *erste Perspektive* für die kommenden Jahre:
- In den Analysisunterricht sollten *mehr* außermathematische *Anwendungen* einbezogen werden, und es sollte sowohl das Modellieren als auch das Umgehen mit fertigen Modellen geschult werden. Mit Anwendungen sollten alle Ziele gefördert und sollte auch eine Antwort auf die Sinnfrage gegeben werden.

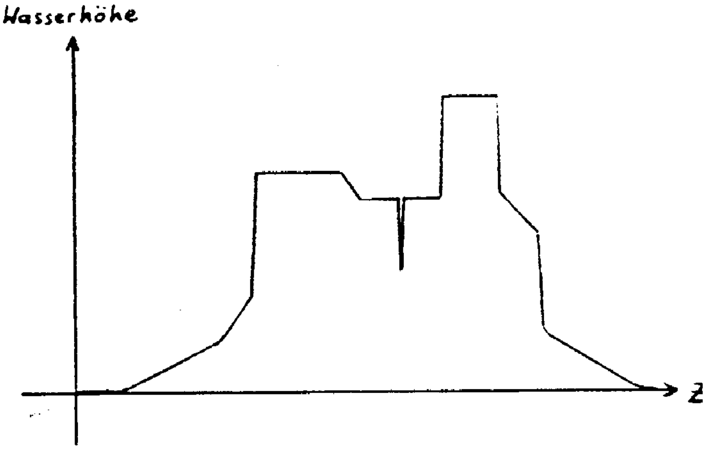
Meine *Prognose* für die Unterrichtspraxis: In den nächsten Jahren werden allmählich mehr Anwendungen einbezogen werden. Die erwähnten Hindernisse sind aber so persistent, daß dies weiterhin nicht im wünschbaren und möglichen Ausmaß geschehen wird, insbesondere bzgl. des Modellierens.

4. Präformale Schulanalysis

Waren die Argumentationen in Abschnitt *2* eigentlich Beweise oder nur beispielbezogene Plausibilitätsüberlegungen, die Vermutungen liefern, welche dann in neuem Anlauf zu beweisen sind (so wie es in allen Schulbüchern geschieht)? Ich möchte offensiv vertreten: Unsere Argumentationen sind - wenn die Voraussetzungen noch präzisiert werden - *strenge*, gültige *Beweise*, aber nicht formalisiert, sondern *präformal*. Genauer sind es *realitätsorientierte* bzw. *geometrisch-anschauliche* Beweise. Genaueres zum Konzept des präformalen Beweisens - zusammen mit einem ausführlichen Beispiel aus dem Analysisunterricht - ist in Blum/Kirsch (1989/91) zu finden.

Schöne Beispiele zum präformalen Arbeiten entstehen beim Erzeugen bzw. Lesen realer Graphen, etwa wie in dieser Aufgabe:





Erzähle eine Geschichte dazu!

Weitere solche Beispiele bringt - in Anlehnung an britische Materialien - G. Schmidt (1993). Leider finden sich solche qualitativen Beispiele noch kaum in deutschsprachigen Schulbüchern, obwohl sie Fähigkeiten wie funktionales Denken, Darstellen und Interpretieren fördern und schon lange vor der 11. Schulstufe im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

Überhaupt wird heute mit Recht der Nutzen geeigneter *Visualisierungen* betont. Dies scheint gerade für heutige, viel stärker visuell geprägte Schüler besonders günstig zu sein und neue didaktische Chancen zu eröffnen (insbesondere im Zusammenhang mit Computeralgebrasystemen).

Weshalb geschieht all dies im Unterricht eher selten? Weshalb sind auch viele Schulbücher eher formal und kalkülorientiert ausgerichtet? Eine plausible Antwort lautet ähnlich wie in Abschnitt *3*: Präformales Arbeiten ist anspruchsvoller und zeitintensiver für Lehrer und Schüler. Außerdem sind Lehrer und Lehrbuchautoren auch kaum gewohnt, konsequent präformal zu argumentieren. Oft wird "streng" mit "formal" gleichgesetzt und werden Anschaulichkeit und Strenge als Gegensatzpaar angesehen. So hat kürzlich ein Lehrer bei der wohlbekannten Konservendosen-Aufgabe einen Minimum-Nachweis über inhaltliche Monotonie-Argumente nicht als vollwertig akzeptiert und auf der formalen Berechnung von 1. und auch noch 2. Ableitung bestanden.

Dies führt zur *zweiten Perspektive*:

- Der Analysisunterricht sollte - bei Begriffsbildungen und bei Begründungen - verstärkt *präformal* vorgehen, ohne dabei Abstriche an der Strenge des Argumentierens zu machen.

Meine *Prognose* für die nähere Zukunft: Vor allem auch aufgrund veränderter Schüler muß und wird sich der Analysisunterricht gegenüber präformalem Arbeiten etwas mehr öffnen. Die formale Kalkülorientierung ist jedoch schwer zu überwinden, und oft wird statt echter inhaltlicher Durchdringung nur vordergründige Veranschaulichung stattfinden (Karikaturen, buntes Layout von Materialien u.ä.).

5. Computereinsatz im Analysisunterricht

Computer sind sicher das derzeit meistdiskutierte Thema in Bezug auf den Mathematikunterricht (vgl. z.B. Dörfler u.a. 1991 oder Reichel 1995). Speziell für den Analysisunterricht gibt es bekanntlich eine Fülle von *Möglichkeiten* zum Einsatz von Computern und eine große Vielfalt entsprechender Unterrichtsvorschläge. Gerade in Österreich gibt es auch schon umfangreiche Unterrichtserfahrungen, insbesondere durch das große DERIVE-Projekt (siehe z.B. Heugl 1995).

Wichtigst für mich ist dabei die Verwendung von Computern als neues *methodisches Hilfsmittel* zum Erreichen der zentralen Ziele; vier Beispiele im Kontext der Überlegungen von vorhin:

- Vermittlung einer adäquaten geometrischen Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff durch fortwährende lokale Vergrößerung von Funktionsgraphen (Realisierung der Idee des "Funktionenmikroskops" nach Kirsch 1979);
- Dynamische Visualisierung des Entstehens einer Integralfunktion als Flächeninhaltsfunktion;
- Visualisierung der Beweise der beiden Hauptsätze;
- Konzentration bei Extremwertaufgaben auf die Übersetzungsphasen und Delegieren der Extremabestimmung an den Computer (graphisch, numerisch und/oder symbolisch).

Als Gerät stelle ich mir sowohl einen einfach bedienbaren *Taschencomputer* vor, den jeder Schüler jederzeit verfügbar hat und dessen Potential sukzessiv im Unterricht erschlossen wird (vgl. Blum 1991), als auch einen PC für Demonstrationszwecke.

Da das Vorhandensein leistungsfähiger Mittel stets auch Rückwirkungen auf *Ziele* und *Inhalte* hat, sind neben methodischen auch curriculare Veränderungen notwendig. Insbesondere werden herkömmlich wichtige Fertigkeiten wie kalkülmäßiges numerisches, algebraisches oder analytisches Rechnen abgewertet; andererseits werden z.B. Folgen, Differenzen- und Differentialgleichungen sowie numerische Verfahren und Ideen relativ wichtiger. Der Computer wirkt somit als "Verlagerer". Die bisher zentralen "kontinuierlichen" Inhalte wie Ableitungsbegriff oder Hauptsätze bleiben aber unverändert wichtig (vgl. zu allem z.B. Blum 1991).

Ein paar Überlegungen zur Rolle der *Kalküle*: Wir wissen schon lange, daß die bisher schulübliche Betonung von Routine-Kalkülen - so bequem sie für alle Beteiligten sein mag - ein falsches Bild von der Analysis vermittelt und dem Ziel-Spektrum des Unterrichts nicht gerecht wird. Computer sind nun aber - um eine bekannte Metapher zu verwenden - wie Scheinwerfer, sie richten ihr Licht unerbittlich auf die Kalküle und zwingen uns, deren Bildungswert zu prüfen. Nun gibt es einen solchen ohne jeden Zweifel. Z.B. trägt das Praktizieren gewisser kalkülmäßiger Fertigkeiten (wie etwa das Ableiten verketteter Funktionen) auch zum *begrifflichen* Verständnis bei. Und um in der Lage zu sein, die von Computern gelieferten Ergebnisse überhaupt vernünftig interpretieren zu können, müssen Schüler Möglichkeiten kennengelernt haben, diese Ergebnisse (zumindest im Prinzip) *selbst* bestimmen zu können; das ist das bekannte, auf B. Buchberger zurückgehende *"White-Box-Black-Box-Prinzip"* (vgl. etwa Heugl 1995). Deshalb können die Kalküle keineswegs - wie hier und da schon gefordert wird - in der Schule einfach von Computern übernommen werden (dies gilt übrigens noch viel stärker für die Sekundarstufe I). Unerläßlich erscheinen mir aber folgende Konsequenzen:

- eine deutliche *Reduzierung* der dem Ausführen von Kalkülen im Analysisunterricht üblicherweise gewidmeten Zeit;
- eine *Konzentration* bei Übungs- und Testaufgaben "per Hand" auf ganz einfache Terme;
- konsequenter *Computereinsatz* bei in Anwendungskontexten ggfs. auftretenden kompliziertere Termen.

Konkret kann das z.B. in der Integralrechnung den vollständigen Verzicht auf Substitution und partielle Integration bedeuten (das schlägt z.B. auch O. Wurnig 1995 vor), oder in der Differentialrechnung den Verzicht auf "per-Hand-Ableiten" gebrochen-rationaler Funktionen. Auf keinen Fall darf mehr die technische Komplexität der involvierten Terme das "Anspruchsniveau" einer Aufgabe definieren, wie es ja bei sehr vielen Reifeprüfungsaufgaben offenbar der Fall ist (vgl. auch Abschnitt *6*).

Natürlich sind zahlreiche aktuelle oder potentielle *Probleme* beim Computereinsatz zu beachten; das wird leider oft nicht genügend betont. So haben Rechner prinzipielle *Grenzen*, etwa bei der Auswahl und Beurteilung von Modellen für Realsituationen. Weiter gibt es vielerlei neue *Gefahren*, z.B. eine unkritische Computergläubigkeit; ein Beispiel aus einem unserer Schulversuche im regulären Analysisunterricht: Mehrere Schüler antworteten bei einer am PC (mit DERIVE als CAS) geschriebenen Schularbeit auf die folgende Frage mit "ja":

- *Gegeben sei* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1000}$ ... *Ist f eine konstante Funktion?*

(siehe Köhler 1991). Weiter haben wir in mehreren Schulversuchen (mit DERIVE und mit THEORIST; vgl. Warmuth 1995) immer wieder beobachtet, daß das verwendete Computeralgebrasystem *selbst* Probleme generiert, welche die inhaltlichen Aspekte mitunter regelrecht überlagern können, z.B. wenn beim Lösen von Gleichungen 3. Grades mit DERIVE Arcussinus-Ausdrücke oder komplexe Zahlen auftauchen. Auch die bloße Handhabbarkeit der vorhandenen Computeralgebrasysteme ist für Schüler noch nicht einfach genug, wobei symbolorientierte Systeme wie THEORIST (jetzt: MATHPLUS) nach unseren Erfahrungen deutlich benutzerfreundlicher sind als menüorientierte wie DERIVE oder befehlsorientierte wie MATHEMATICA. Auch unter didaktischen Gesichtspunkten lassen die vorhandenen Systeme noch einige Wünsche offen (z.B. bzgl. Animation oder bzgl. Interaktion Graph $\leftrightarrow$ Term), wobei es bei Neuentwicklungen hoffnungsvolle Tendenzen gibt.

Weiter darf nicht vergessen werden, daß Computer den Unterricht für Schüler prinzipiell anspruchsvoller machen, auch wegen der Notwendigkeit, sie geplant einzusetzen, d.h. auch auf einer Meta-Ebene zu agieren; hierauf hat u.a. schon W. Dörfler (1991) hingewiesen. Für Lehrer wird es sowieso anspruchsvoller. Insgesamt gesehen dürfen die durch den Computer im allgemeinen und durch das benutzte System im besonderen erzeugten Schwierigkeiten und der Zeitbedarf keinesfalls unterschätzt werden. Ich kann daher die mitunter geäußerten Hoffnungen auf neue unterrichtliche Freiräume nicht teilen.

Es gibt noch mehr Probleme und offene Fragen. Natürlich habe auch ich keine Patentrezepte, vielmehr will ich nur betonen, daß erstens noch viel mehr empirische Forschungsarbeiten nötig sind und zweitens sich Lehrer *und* Schüler all solcher Probleme bewußt sein sollten, auch als Anlaß für Reflexionen über Computer und damit zur Entwicklung von Meta-Wissen. Ein Plädoyer *gegen* den Einsatz von Computern soll meine Auflistung von Problemen keineswegs sein.

Die *dritte* und (damit eng zusammenhängend) *vierte Perspektive* für die nächsten Jahre lauten somit:

- Im Analysisunterricht sollten *Computer* - allzeit verfügbare Taschencomputer auch gelegentlich genutzte PCs - als Werkzeuge zum Erreichen der Ziele eingesetzt werden.

- Das schulübliche Curriculum sollte zu Lasten der Kalküle *umstrukturiert* werden.

Meine *Prognose*: Wirkliche Veränderungen kann es erst geben, wenn Taschencomputer in Klassensätzen zur Verfügung stehen. Diese Voraussetzung wird in wenigen Jahren erfüllt sein. Weiter muß die Software didaktisch weiterentwickelt werden. Um aber Lehrer in der Breite von der Sinnhaftigkeit des Computereinsatzes und der Notwendigkeit curricularer Veränderungen zu überzeugen, ist in der Lehreraus- und -fortbildung weiterhin viel zu tun (man vgl. hierzu die Vorschläge von H. Scheuermann 1994).

6. Leistungsbeurteilung im Analysisunterricht

Während ich in den Abschnitten *3* bis *5* Entwicklungen angesprochen habe, die bereits in den achtziger Jahren begonnen haben, komme ich nun zu einem Aspekt, der im deutschsprachigen Raum erst in den letzten Jahren ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt ist: Das Thema *Leistungsmessung und -beurteilung*. International ist "assessment" schon viel länger eines der meistdiskutierten Probleme (vgl. etwa Niss 1993). Bei uns ist diese Diskussion i.w. "extern" angestoßen worden, nämlich durch die Existenz von Computern, die viele schulklassischen Leistungsanforderungen "trivialisieren", und durch die neue Schülergeneration. Ich bin sicher, daß sich wünschbare Veränderungen erst dann in der Unterrichtspraxis durchsetzen können, wenn entsprechende *neuartige Aufgaben* vorliegen. Das ist noch zu wenig der Fall. Hier zeigt sich eine der wichtigsten Forschungs- und Entwicklungsaufgaben - in engem Verbund zwischen Lehrern und Didaktikern - für die kommenden Jahre (vgl. z.B. Herget 1994).

Hier ein Beispiel aus einer am PC geschriebenen Reifeprüfungsarbeit im Rahmen unserer Schulversuche (Aufgabe entwickelt 1994 von H. Scheuermann):

2. **Die Bundesbahn plant zur schnelleren Personenbeförderung den Bau einer Hochgeschwindigkeitstrasse von Ulm nach Zürich. Zur Wegminimierung und zur Vermeidung vieler geschwindigkeitshemmender Kurvenfahrten ist eine direkte Hochgeschwindigkeitstrasse mit einer Brücke über den Bodensee (Strecke BC, vgl. Abb.) geplant. Aufgrund des landschaftlichen Profils und aus ökologischen Gesichtspunkten liegt die Streckenführung zwischen A und B fest (vgl. Abb.). Die Projektierung der Strecke von B nach C steht noch aus:**

Abb.: Projektierung einer ICE-Trasse. Maßstab: 1cm <==> 3km

2.1. **Definieren Sie ein geeignetes Koordinatensystem (Koordinatenursprung?).**

2.2. **Nähern Sie die Gleisstrecke A nach B durch eine ganzrationale Funktion kleinsten Grades (geeigneten Hilfspunkt aus der Abbildung entnehmen).**

. . . .

Für eine ähnliche, im GDM-Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik erarbeitete Aufgabe für Leistungskurse bzw. math.-naturwiss. Gymnasien siehe Hischer (1992, S. 124/125).

Diese Aufgaben sind realitätsbezogen, computerorientiert und in Teilen auch präformal. Die Ansprüche liegen nicht im Vollzug von Kalkülen, sondern im Modellieren, Interpretieren und Argumentieren.

Viele inhaltlich orientierte Aufgaben finden sich in neueren österreichischen Schulbüchern. Ich möchte eine Idee aus Band 3 von Bürger/Fischer/Malle für meine Zwecke verwenden und eine neuartige Schularbeitsaufgabe daraus machen:

1.38 Dreht man das Lenkrad eines Autos um einen Winkel mit dem Maß x (beginnend in der Geradeausstellung), so drehen sich die Vorderräder um einen Winkel mit dem Maß w (x). Die Vorderräder reagieren dabei unterschiedlich auf eine Änderung des Lenkradeinschlages x. Dreht man z. B. das Lenkrad immer um 1° weiter, so drehen sich die Vorderräder im allgemeinen immer weniger mit.

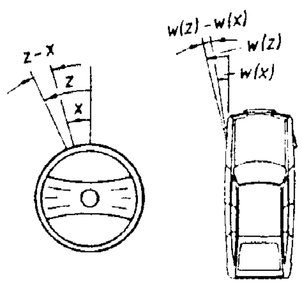


Fig. 1.6

1) *Erkläre, was hier die lokale Änderungsrate* $\frac{dw(x)}{dx}$ *bedeutet.*

2) *Begründe inhaltlich, daß das verallgemeinerte Produkt* $\int_0^x \frac{dw(t)}{dt}dt$ *gleich w(x) ist.*

Auch das in Abschnitt *4* hervorgehobene qualitative Argumentieren mit realen Graphen paßt hierher. Allgemeiner gilt (J. Meyer/ B. Winkelmann in Hischer 1992, S. 126): "*Dem Verbalisieren von Ansätzen, Argumenten und Begründungen ist mehr Gewicht zuzuweisen. Im Prinzip nähern sich .... auch Mathematikklausuren .... dem Aufsatz.*" Ich würde dies etwas vorsichtiger (vorerst?) nur auf einzelne Aufgaben beziehen, im Sinne von W. Herget (1993, S. 69): "*Versuchen Sie einen ersten kleinen Schritt, liebe Kollegin, ..., mit einer einzigen solchen 'neuen' Aufgabe (unter mehreren 'alten'....).*" Und wie etwa die Analysen von Weigand/Weth (1991) gezeigt haben, erfordern auch herkömmliche Reifeprüfungsaufgaben durchaus beträchtliche begriffliche und strategische Fähigkeiten. Nur darf man - wie schon in Abschnitt *5* erwähnt - in Zukunft das Anspruchsniveau einer Aufgabe nicht mehr an der Komplexität der involvierten Terme messen.

Damit ergibt sich die *fünfte* Perspektive:

- Der Analysisunterricht sollte seine *Leistungsanforderungen* weniger als bisher an Kalkülen und mehr an inhaltlichen und realitätsbezogenen Aufgaben und Situationen orientieren, auch unter Verwendung von Computern als Hilfsmittel und auch in anderen Formen als durch Klausuren.

Meine *Prognose*: Allmählich wird es Veränderungen geben, wenn genügend viele überzeugende und praxiserprobte Beispiele vorgestellt werden, so wie dies seit 1995 in der von W. Herget betreuten Rubrik "Die neue Aufgabe" in der Zeitschrift "mathematik lehren" geschieht. Wegen der leichten Verfügbarkeit bewährter kalkülorientierter Aufgabentypen für jedes Niveau werden diese jedoch wohl zumindest in den nächsten fünf Jahren noch dominant bleiben.

7. Weitere Aspekte

Es gibt noch mehr, m.E. weniger zentrale aktuelle Tendenzen und zugehörige Perspektiven für den Analysisunterricht, wobei vieles - wie ja auch schon vorhin - nicht wirklich neu, sondern nur wiederentdeckt worden ist. So ist in den letzten Jahren eine verstärkte Wieder-Zuwendung der Didaktik zu den Lehrenden und Lernenden sowie zu unterrichtlichen Interaktions- und Kommunikationsprozessen festzustellen. Analysisrelevante Beispiele sind die Untersuchungen von U.-P. Tietze (1986) zu *Lehrerkonzepten* oder von B. Andelfinger (1990) zu *Schülerkonzepten*. Dabei ist natürlich wichtig, daß diese "Subjektorientierung" nicht als Alternative zu stoffdidaktischen Ansätzen angesehen wird, sondern daß sich beide Aspekte wechselseitig unterstützen und ergänzen.

Ein derzeit vieldiskutiertes und recht heikles Thema will ich noch ansprechen: Die sogenannte "Benachteiligung" von *Mädchen* im Mathematikunterricht. M.E. ist dies eine unangemessene Betrachtungsweise, weil sie sich, kurz gesagt, an männlichen Mustern statt an weiblichen Stärken orientiert. Wie Erfahrungen - vorwiegend aus dem angelsächsischen Raum - zeigen, scheinen solche Materialien besonders gut für Mädchen geeignet, die präformale Darstellungen bevorzugen, konkrete Aktivitäten fördern, stärker inhaltliche Aspekte betonen und nach der Bedeutung der Inhalte fragen, die menschliche und geschichtliche Dimension von Mathematik herausstellen und stärker problemorientiert vorgehen. Das sind aber lauter sowieso wünschbare Gestaltungsgesichtspunkte. Ein gutes Beispiel (mit gewissen Defiziten aufgrund der mangelnden Sachsystematik) ist die australische Schulbuchreihe "Investigating Change". Die Autorin, Mary Barnes, schreibt selbst (1994, S. 55): "*The project team set out to create a course that would help to encourage girls to continue with mathematics .... In trying to do this, we found that what seemed to be good for girls was also good mathematics teaching for everyone.*" Die Reihe wird demzufolge als "*gender-inclusive*" (in deutsch besser: "*geschlechterangemessen*") charakterisiert. In dieser Richtung sehe ich sinnvolle Entwicklungsperspektiven, nicht im Konstruieren von "mädchenspezifischen" Materialien, bei denen womöglich physikalische Beispiele durch soziale ersetzt würden. So erfolgt auch in der eben genannten Reihe der Einstieg in die Differentialrechnung konsequenterweise über das klassische Geschwindigkeitsproblem (wofür es ja eine Fülle überzeugender Argumente gibt), die Schüler sollen aber selbst aktiv experimentieren, Graphen erstellen und analysieren, und stets ist die reale und die geometrische Bedeutung der betrachteten Terme im Blick.

Wenn der Analysisunterricht sich so entwickelt, wie in meinen Perspektiven angedeutet, wird er automatisch mehr geschlechterangemessen. Glücklicherweise scheint auch das Benachteiligungsmodell auf dem Rückzug begriffen. Trotzdem befürchte ich, daß in diesem Zusammenhang auch weiterhin viele vordergründige Aktivitäten stattfinden werden, etwa wenn zunehmend peinlich genau darauf geachtet wird, daß gleich viele Männlein wie Weiblein in Schulbüchern vorkommen oder daß alle Formulierungen "geschlechtsneutral" sind.

8. Ausblick

Abschließend sei (wieder einmal) betont: Der wichtigste Einflußfaktor für das unterrichtliche Geschehen ist die individuelle *Lehrperson*. Mit und durch Lehrer - unterstützt durch Lehrmaterialien - sind Veränderungen, wie ich sie in den fünf Perspektiven umrissen habe, *wirklich* realisierbar, und *nur* so. Gerade eine anspruchsvolle Konzeption, wie ich sie mir vorstelle, mit sorgfältig gestufter und stärker inhaltlich ausgerichteter Mathematik, erfordert hochkompetente Lehrer. Hierzu muß wesentlich auch die Lehreraus- und -fortbildung beitragen, und hierfür müssen mehr junge Lehrer in den Schuldienst kommen, damit nicht bloß der Reformdruck "von außen" Änderungen erwirkt, sondern daß eine Reform des Unterrichts "von innen" stattfindet. Ich bin optimistisch genug, die Eingangs-Frage "Quo vadis?" in diesem Sinne positiv zu beantworten.

Literatur

Andelfinger, B.: LehrerInnen- und LernerInnenkonzepte im Analysisunterricht. In: Der Mathematikunterricht 36(1990), H. 3, S. 29-44

Barnes, M.: Investigating Change: A Gender-Inclusive Course in Calculus. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 26(1994), H. 2, S. 49-56

Blum, W.: Ein Grundkurs in Analysis. In: Didaktik der Mathematik 3(1975), H. 1, S. 163-184

Blum, W.: Der (Taschen-)Computer als Werkzeug im Analysisunterricht. In: Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel (Hrsg.: H. Postel/ A. Kirsch/ W. Blum). Schroedel, Hannover 1991, S. 71-84

Blum, W. (Hrsg.): Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim 1993

Blum, W.: Analysisunterricht - Aktuelle Tendenzen und Perspektiven für das Jahr 2000. In: Mathematik in der Schule 33(1995a), H. 1, S. 1-11 und H. 2, S. 66-75

Blum, W.: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. In: Tagungsband des 7. Kärntner Symposiums für Didaktik der Mathematik (Hrsg.: W. Dörfler u.a.). HPT, Wien 1995b

Blum, W./ Kirsch, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht 25(1979), H. 3, S. 6-24

Blum, W./ Kirsch, A.: Warum haben nicht-triviale Lösungen von f' = f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum "inhaltlich-anschaulichen Beweisen". In: Anschauliches Beweisen (Hrsg.: H. Kautschitsch/ W. Metzler). HPT, Wien 1989, S. 193-209. Erweiterte englische Fassung in: Educational Studies in Mathematics 22(1991), H. 2, S. 183-203

Blum, W./ Törner, G.: Didaktik der Analysis. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1983

Böer, H.: Extremwertproblem Milchtüte. In: Blum 1993, S. 1-16

Danckwerts, R./ Vogel, D.: Quo vadis Analysisunterricht? In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 45(1992), H. 6, S. 370-374; Diskussionsbeitrag dazu von H.-G. Schönwald in 46(1993), H. 8, S. 501-503

Dörfler, W.: Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Dörfler u.a. 1991, S. 51-75

Dörfler, W. u.a. (Hrsg.): Computer - Mensch - Mathematik. HPT, Wien 1991

Fischer, R.: Sinn mathematischer Inhalte und Begriffsentwicklungen im Analysisunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 3(1982), H. 3/4, S. 265-294

Gräupl, E.: Das Spannungsfeld: Lehrerausbildung-Unterrichtspraxis. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1990. Franzbecker, Bad Salzdetfurth 1991, S. 49-55

Herget, W.: Mathe-(Klausur-)Aufgaben - einmal anders? In: Hischer 1993, S. 58-69

Herget, W.: "Die alternative Aufgabe" - veränderte Aufgabenstellungen und veränderte Lösungswege mit/trotz Computersoftware. In: Hischer 1994, S. 150-154

Heugl, H.: Computeralgebrasysteme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (Gymnasien). In: Reichel 1995, S. 225-249

Hischer, H. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Franzbecker, Hildesheim 1992

Hischer, H. (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Franzbecker, Hildesheim 1993

Hischer, H. (Hrsg.): Mathematikunterricht und Computer. Franzbecker, Hildesheim 1994

Kaiser, G./ Blum, W./ Schober, M.: Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht, Bände 1/2. FIZ, Karlsruhe 1982/ ^{2}1992

Kirsch, A.: Eine "intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. In: Didaktik der Mathematik 4(1976), H. 2, S. 87-105

Kirsch, A.: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht 25(1979), H. 3, S. 25-41

Köhler, R.: Bericht über einen Unterrichtsversuch zum Einsatz von DERIVE im Analysisunterricht. In: Dörfler u.a. 1991, S. 151-158

Niss, M. (Hrsg.): Investigations into Assessment in Mathematics Education. Kluwer, Dordrecht 1993

Reichel, H.-C. (Hrsg.): Computereinsatz im Mathematikunterricht. BI, Mannheim 1995

Scheuermann, H.: Der Computer im Mathematikunterricht - ein Thema für die Lehrerfortbildung. In: mathematik lehren, Heft 65/1994, S. 60-65

Schmidt, G.: "Kommt das auch in der Arbeit dran?" In: Der Mathematikunterricht 39(1993), H. 1, S. 10-27

Tietze, U.-P.: Der Mathematiklehrer in der Sekundarstufe II. Franzbecker, Bad Salzdetfurth 1986

Tietze, U.-P.: Der Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Curriculumentwicklung und didaktische Forschung. In: mathematica didactica 15(1992), H. 2, S. 3-37

Warmuth, T.: Untersuchungen zum Einsatz von Computeralgebrasystemen beim Bearbeiten realitätsorientierter Aufgaben im Analysisunterricht. Dissertation, Universität Kassel 1995

Weigand, H.-G./ Weth, T.: Zum Lösen von Abituraufgaben mit DERIVE. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 44(1991), H. 3, S. 177-182

Wurnig, O.: Meine Erfahrungen mit dem Computer im Mathematikunterricht bis zum integrierten Einsatz in Klasse 12. In: Reichel 1995, S. 55-115

Anschrift des Autors:
Prof. Dr. Werner Blum, Universität Kassel, Fachbereich Mathematik/Informatik, D-34109 Kassel